1 Fibonacci-Zahlen und Teilbarkeit

Dies ist das Skript zu dem Vortrag, den ich auf der Sommerakademie 2001 und 2002 gehalten habe. Fehler bitte an folgende Adresse: `an@FabianMeier.de`.

1.1 Definition

Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Sie bilden also die Folge:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

1.2 Summenformeln

Satz 1.

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1 \tag{1}$$

Beweis. Man kann $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ umformen zu $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_1 &= -F_2 + F_3 \\ F_2 &= -F_3 + F_4 \\ F_3 &= -F_4 + F_5 \\ \ldots \\ F_{n-1} &= -F_n + F_{n+1} \\ F_n &= -F_{n+1} + F_{n+2} \end{aligned}$$

Aufaddieren führt auf:

$$\begin{aligned} F_1 + \ldots + F_n &= -F_2 + F_3 - F_3 + F_4 - \ldots + F_{n+2} \\ F_1 + \ldots + F_n &= F_{n+2} - F_2 \\ F_1 + \ldots + F_n &= F_{n+2} - 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

Auf ähnliche Weise kann man noch mehrere solcher Formeln beweisen, z. B. kann man die Summe der Fibonacci-Zahlen mit geradem oder ungeradem Index bestimmen.

1.3 Teilbarkeit

Die folgenden Beweise bauen fast alle auf dem Prinzip der vollständigen Induktion auf. Häufig werden wir folgende Hilfsformel benutzen, die wir zuerst beweisen werden:

Satz 2.

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} \tag{2}$$

Beweis. Wir führen eine vollst. Induktion nach m durch. Zur Induktionsverankerung beweisen wir die Formel für $m = 1$ und $m = 2$.

- $(m = 1)$:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_{n-1}F_1 + F_nF_2 \\ F_{n+1} &= F_{n-1} + F_n \end{aligned}$$

  Dies ist die Definition

- $(m = 2)$:

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n-1}F_2 + F_nF_3 \\ F_{n+2} &= F_{n-1} + F_n \cdot 2 \\ F_{n+2} &= F_{n-1} + F_n + F_n \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

  Dies ist offensichtlich war.

Nun folgt der Induktionsschritt. Wir nehmen an, daß:

$$\begin{aligned} F_{n+k} &= F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1} \\ F_{n+k+1} &= F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2} \end{aligned}$$

Zu zeigen ist nun:

$$F_{n+k+2} = F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3}$$

Addieren wir die beiden Annahmen:

$$\begin{aligned} F_{n+k} + F_{n+k+1} &= F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1} + F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2} \\ F_{n+k+2} &= F_{n-1}(F_k + F_{k+1}) + F_n(F_{k+1} + F_{k+2}) \\ F_{n+k+2} &= F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

Nun beweisen wir eine mächtige Aussage, aber es wird noch nicht die mächtigste Aussage sein, die in diesem Skript vorkommt:

Satz 3.

$$m|n \quad \Rightarrow \quad F_m|F_n \tag{3}$$

Beweis. Da n ein Vielfaches von m ist, schreibe ich n als $m \cdot m_1$. Nun führen wir eine Induktion nach m_1 durch.

Induktionsverankerung $(m_1 = 1)$

$m|m \Rightarrow F_m|F_m$. Dies ist offensichtlich war.

Induktionssschritt $(m_1 \Rightarrow m_1 + 1)$

Annahme:

$$F_m|F_{mm_1}$$

Zu zeigen:

$$F_m|F_{m(m_1+1)}$$

Wir benutzen nun (2) für die Zerlegung.

$$F_{m(m_1+1)} = F_{mm_1+m} = F_{mm_1-1}F_m + F_{mm_1}F_{m+1}$$

Der linke Summand ist offensichtlich durch F_m teilbar, der rechte Summand enthält F_{mm_1}. Dies ist nach Induktionsannahme durch F_m teilbar. Somit ist auch der Gesamtausdruck durch F_m teilbar. $\boxed{\text{q.e.d.}}$

Wenn n eine zusammengesetzte Zahl größer als 4 ist, dann hat n auch einen Teiler, der größer als 2 ist. Damit ist F_n immer durch eine Fibonaccizahl größer als F_2 teilbar, also auch zusammengesetzt. Fibonacci-Zahlen mit zusammengesetzten Indizes können also keine Primzahlen sein. Die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen unter den Fibonacci-Zahlen gibt, ist bis heute nicht geklärt.

Nun beweisen wir noch eine Hilfsaussage:

Satz 4. *Zwei benachbarte Fibonacci-Zahlen sind immer teilerfremd.*

Beweis. Annahme: F_n und F_{n+1} haben einen gemeinsamen Teiler $d > 1$. Dann ist ihre Differenz auch durch d teilbar: $d|F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$. Somit haben auch F_n und F_{n-1} diesen gemeinsamen Teiler. Dies kann man so fortführen und erhält schließlich die Aussage, daß d F_1 teilt. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch. Die Annahme ist somit falsch. $\boxed{\text{q.e.d.}}$

Nun beweisen wir den wichtigsten Teilbarkeitssatz über Fibonacci-Zahlen. Dazu liste ich hier ein paar wichtige Aussagen über größte gemeinsame Teiler auf, die gleich verwendet werden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ggT}(a,b) &\quad | \quad \mathrm{ggT}(a,bc) \\
\mathrm{ggT}(ac,bc) &\quad = \quad \mathrm{ggT}(a,b)c \\
\mathrm{ggT}(a,c) = 1 &\quad \Rightarrow \quad \mathrm{ggT}(a,bc) = (a,b) \\
b|a &\quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{ggT}(a,b) = b \\
b|c &\quad \Rightarrow \quad \mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(a+c,b)
\end{aligned}$$

Satz 5.

$$\mathrm{ggT}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{ggT}(n,m)}$$

Beweis. Wie in dem euklidischen Verfahren zur Bestimmung des ggT zerlegen wir m in $nq_0 + r_1$ mit $0 \leq r_1 < n$. Ich kürze $\mathrm{ggT}(x,y)$ mit (x,y) ab.

$$(F_m, F_n) = (F_{nq_0+r_1}, F_n)$$

$F_{nq_0+r_1}$ kann man nun zerlegen:

$$(F_m, F_n) = (F_{nq_0-1}F_{r_1} + F_{nq_0}F_{r_1+1}, F_n)$$

Der rechte Summand enthält F_{nq_0}, was nach dem oben bewiesenen Satz (3) durch F_n teilbar ist. Nach dem Satz $b|c \Rightarrow \mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(a+c,b)$ kann ich den zweiten Summanden also weglassen:

$$(F_m, F_n) = (F_{nq_0-1}F_{r_1}, F_n)$$

F_{nq_0} und F_{nq_0-1} sind teilerfremd, da sie benachbart sind. Da F_{nq_0} durch F_n teilbar ist, ist auch F_n zu F_{nq_0-1} teilerfremd. Nun benutze ich den Satz $\mathrm{ggT}(a,c) = 1 \Rightarrow \mathrm{ggT}(a,bc) = (a,b)$. Da die beiden Zahlen teilerfremd sind, kann ich F_{nq_0-1} weglassen. Dann steht dort

$$(F_m, F_n) = (F_{r_1}, F_n)$$

Nun können wir n aufspalten in $q_1r_1 + r_2$ und auf gleiche Weise beweisen:

$$(F_{r_1}, F_n) = (F_{r_1}, F_{r_2})$$

So fährt man fort. In den Indizes wird nun nacheinander der ggT von n und m bestimmt. Irgendwann erhält man: $(F_{r_{z-1}}, F_{r_z})$ mit $r_z|r_{z-1}$. Dann ist r_z der ggT von m und n. Aus $r_z|r_{z-1}$ folgt nach (3) $F_{r_z}|F_{r_{z-1}}$, damit $(F_{r_{z-1}}, F_{r_z}) = F_{r_z}$. Somit auch $(F_m, F_n) = F_{r_z}$. r_z ist ggT(n, m), somit gilt:

$$(F_m, F_n) \quad = \quad F_{(m,n)}$$

q.e.d.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun z. B. $m|n \Rightarrow F_m|F_n$ erweitern zu $m|n \Leftrightarrow F_m|F_n$.

Satz 6.

$$m|n \quad \Leftrightarrow \quad F_m|F_n \tag{4}$$

Beweis. Die eine Richtung wurde oben schon gezeigt, es bleibt also nur noch $m|n \Leftarrow F_m|F_n$ zu zeigen. Aus $F_m|F_n$ folgt $(F_m, F_n) = F_m$ Andererseits gilt$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$. Somit ist $(m, n) = m$, woraus $m|n$ folgt. q.e.d.

Da z.B. $F_4 = 3$ ist, kann man sagen, daß F_n genau dann durch 3 teilbar ist, wenn n durch 4 teilbar ist. Man kann auf diese Weise weitere Teilbarkeitskriterien aufstellen.

Wenn man nun nach einer Teilbarkeitsregel für 4 sucht, tritt das Problem auf, daß 4 keine Fibonacci-Zahl ist. Nun gilt aber folgender Satz:

Satz 7. *Ist F_m die kleinste Fibonacci-Zahl, die durch n teilbar ist, so ist jede durch n teilbare Fibonacci-Zahl durch F_m teilbar*

Beweis. Sei $F_p > F_m$ eine Fibonacci-Zahl, die durch n, aber nicht durch F_m teilbar ist. ggT(F_p, F_m) ist höchstens F_m, da dies die kleinere von beiden Zahlen ist. Da aber F_m nicht ggT(F_p, F_m) teilt, gilt ggT$(F_p, F_m) < F_m$. Außerdem gilt nach dem oben bewiesenen Satz: ggT$(F_p, F_m) = F_{\mathrm{ggT}(p,m)}$. Da n sowohl F_p als auch F_m teilt, teilt n den ggT, also auch $F_{\mathrm{ggT}(p,m)}$. Außerdem gilt, wie wir oben gesehen haben: $F_{\mathrm{ggT}(p,m)} = \mathrm{ggT}(F_p, F_m) < F_m$. Es gibt aber keine durch n teilbare Fibonacci-Zahl, die kleiner als F_m ist, da dies nach Def. die kleinste solche Fibonacci-Zahl ist. Somit kann es keine Zahl F_p geben. q.e.d.

$F_6 = 8$ ist die kleinste Fibonacci-Zahl, die durch 4 teilbar ist. Somit sind sämtliche durch 4 teilbare Fibonacci-Zahlen auch durch 8 teilbar. Eine Fibonacci-Zahl ist, wie wir oben gesehen haben, genau dann durch 8 teilbar, wenn ihr Index durch 6 teilbar ist.

Wenn wir nun eine beliebige Zahl nehmen, z. B. 195, gibt es dann dazu immer eine Fibonacci-Zahl, die ein Vielfaches dieser Zahl ist? Können wir also für jede beliebige Zahl ein Teilbarkeitskritierium aufstellen? Der folgende Satz beantwortet diese Frage:

Satz 8. *Zu jeder Zahl m gibt es eine Fibonacci-Zahl F_q mit $m|F_q$*

Beweis. Sei u_n der Rest von F_n beim Teilen durch m. u_n liegt also im Wertebereich von 0 bis $(m - 1)$. In der Folge u_n bilden wir nun auf folgende Weise Paare:

$$(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4), \ldots$$

Jedes Folgenelement ist also in zwei Paaren enthalten. Für den Rest beim Teilen durch m gibt es nur m mögliche Werte, somit gibt es nur m^2 verschiedene Paare. Unter den ersten $m^2 + 1$ Paaren gibt es also mindestens zwei gleiche. Wir beweisen nun, daß das erste wieder auftretende Paar $(u_1, u_2) = (1, 1)$ ist. Dazu wiederlegen wir folgende Annahme: Das erste erneut auftretende Paar sei (u_k, u_{k+1}) mit $k > 1$. (u_l, u_{l+1}) mit $l > k$ ist dann gleich diesem Paar, es gilt also $u_k = u_l$ und $u_{k+1} = u_{l+1}$. Bildet man nun die Differenz dieser Gleichungen, so ergibt sich: $u_k - u_{k+1} = u_l - u_{l+1} \Leftrightarrow u_{k-1} = u_{l-1}$. Somit ist $(u_{k-1}, u_k) = (u_{l-1}, u_l)$. Dies widerspricht der Annahme, daß es sich bei (u_k, u_{k+1}) um das erste erneut auftretende Paar handelt. Es gilt somit $k = 1$ und $(u_k, u_{k+1}) = (1, 1)$. Für irgendein $l > 1$ gilt also $(u_l, u_{l+1}) = (1, 1)$ und damit $u_{l+1} - u_l = 0 \Leftrightarrow u_{l-1} = 0$. Nach Definition von u_n ist somit F_{l-1} durch m teilbar. q.e.d.

1.4 Dezimalbruchspielereien

Wir bilden aus der Fibonacci-Folge einen Dezimalbruch, indem wir die Folgenglieder immer um eine Stelle nach rechts verschieben und addieren:

```
 0,0
+   1
+    1
+     2
+      3
+       5
+        8
+        13
+         21
+          34
+           ...
------------------
 0,011235955056179...
```

Obwohl diese Zahl auf den ersten Blick recht merkwürdig aussieht, kann man ihren Wert exakt bestimmen. Schreiben wir sie in einer etwas algebraischeren Weise auf:

$$P = \left(\frac{1}{10}\right)^1 F_0 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 F_1 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 F_2 + \ldots$$

Betrachten wir nun auch $P/10$ und $P/100$:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{10}\right)^1 F_0 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 F_1 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 F_2 + \ldots \\ \frac{P}{10} &= \left(\frac{1}{10}\right)^2 F_0 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 F_1 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 F_2 + \ldots \\ \frac{P}{100} &= \left(\frac{1}{10}\right)^3 F_0 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 F_1 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 F_2 + \ldots \end{aligned}$$

Bei einer bestimmten Potenz von $1/10$ stehen in den drei Gleichungen drei aufeinanderfolgende Fibonaccizahlen, bei $(1/10)^3$ steht z.B. in der obersten Gleichung F_2, in den anderen beiden F_1 und F_0. Wenn man von der obersten Gleichung die unteren beiden abzieht, fallen diese Terme heraus. Ab $(1/10)^3$ sind dann also alle Ausdrücke 0. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} P - \frac{P}{10} - \frac{P}{100} &= \left(\frac{1}{10}\right) F_0 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 F_1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2 F_0 \\ \frac{89}{100} P &= \frac{1}{100} \\ P &= \frac{1}{89} \end{aligned}$$

Obwohl wir P auf so abstruse Weise konstruiert haben, ergibt sich als Wert ein Stammbruch.