Miquel und Simson

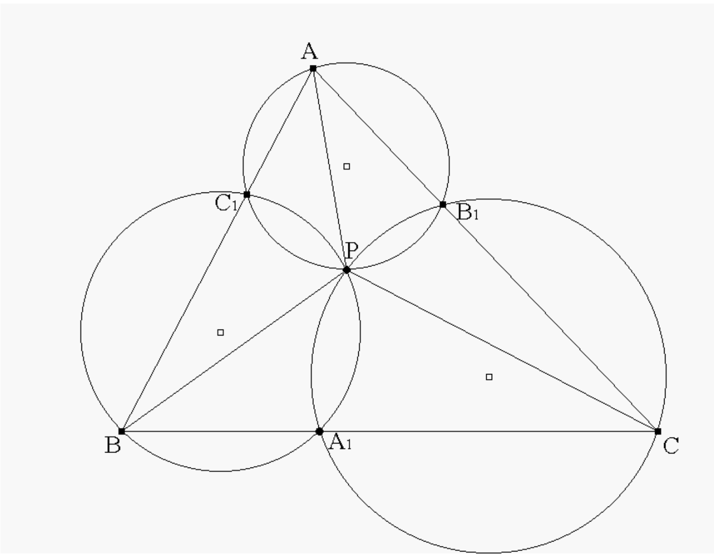
Fabian Meier
Spindelstr. 120a
33604 Bielefeld
an@FabianMeier.de

23. Dezember 2002

Bei den folgenden Sätzen handelt es sich um Sätze der Elementargeometrie, die größtenteils erst im 19. oder 20. Jahrhundert entdeckt wurden.

1 Der Miquelsche Punkt

Satz 1. *Nimmt man auf jeder Seite eines gegebenen Dreiecks einen Punkt beliebig an und zeichnet durch jede Ecke und die beiden Punkte, die auf den der Ecke benachbarten Seiten liegen, Kreise, so gehen die drei Kreise durch einen Punkt, der* Miquelscher Punkt *genannt wird.*



Beweis. Gegeben sei das Dreieck ABC; die Innenwinkel seien wie üblich mit α, β und γ bezeichnet. auf jeder Seite sei ein Punkt beliebig angenommen. Diese Punkte bezeichnen wir mit A_1, B_1 und C_1. Durch die Punkte A, C_1,B_1, durch B, C_1, A_1 und durch C, A_1, B_1 sind Kreise gezeichnet. Es soll nun bewiesen werden, daß die drei Kreise einander in einem Punkt schneiden.

Die beiden Kreise durch A, B_1, C_1 schneiden einander in C_1 und einem beliebigen Punkt P. AC_1PB_1 ist ein Sehnenviereck und deshalb ist $\angle C_1PB_1 = 180^\circ - \alpha$ (ergänzt sich mit α zu 180°). Ebenso gilt $\angle C_1PA_1 = 180^\circ - \beta$. Beide zusammen ergeben mit A_1PB_1 den Vollwinkel 360°. Also gilt:

$$\angle A_1PB_1 = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

Da sich $\angle A_1PB_1$ und $\angle B_1CA_1 = \gamma$ zu 180° ergänzen, ist A_1CB_1P ein Sehnenviereck. Der Kreis durch A_1, B_1 und C geht also auch durch P. Dies war zu beweisen. $\boxed{\text{q.e.d.}}$

Der Satz über den Miquelschen Punkt läßt sich auch auf Punkte auf den verlängerten Seiten des Dreiecks ausdehnen; der Beweis verläuft ähnlich, ich verzichte darauf, ihn hier vorzuführen, gehe aber von nun an davon aus, daß A_1, B_1 und C_1 beliebige Punkte auf den Geraden BC, CA und AB sein können.

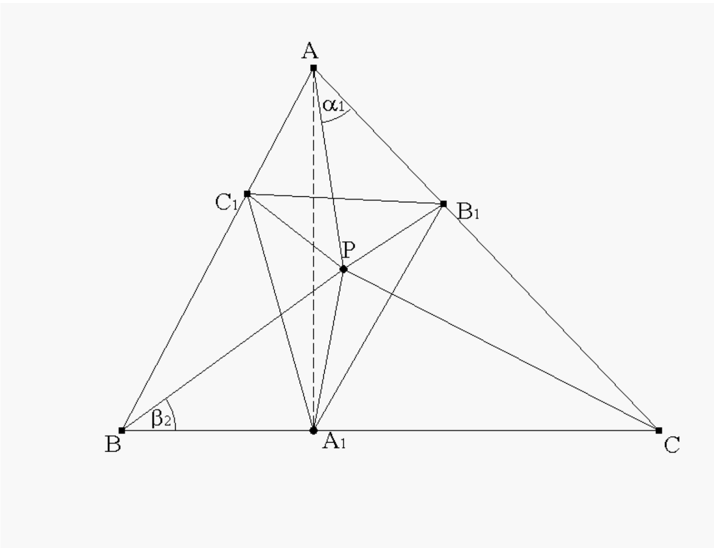
Satz 2. *Die Strecken, die den Miquelschen Punkt mit den drei Punkten A_1, B_1 und C_1 verbinden, bilden mit den Dreiecksseiten gleiche Winkel.*

Beweis. Die Aussage ergibt sich daraus, daß bei A_1, B_1 und C_1 jeweils Sehnenvierecke aneinanderstoßen. Da AC_1PB_1 ein Sehnenviereck ist, ist $\angle PC_1A = 180^\circ - \angle AB_1P$. $\angle AB_1P$ ist aber ein Nebenwinkel zu $\angle PB_1C$, somit ist $\angle PC_1A = \angle PB_1C$, genauso folgert man: $\angle PB_1C = \angle CA_1P$. Damit sind die Schnittwinkel von PA_1, PB_1 und PC_1 mit den Seiten gleich. $\boxed{\text{q.e.d.}}$

Definition 1. Die Punkte A_1, B_1 und C_1 nennt man *Miquelsches Dreieck zu P.* Stehen PA_1, PB_1 und PC_1 auf den Seiten senkrecht, so nennt man $A_1B_1C_1$ Fußpunktdreieck zu P.

Es sei angemerkt, daß zu einem Punkt P beliebig viele Miquel-Dreiecke existieren. Man kann z.B. einen beliebigen Punkt A_2 auf BC wählen. Wenn man ihn mit P verbindet und bei P an PA_1 die Winkel $180^\circ - \gamma$ und $180^\circ - \beta$ anträgt, erhält man PB_1 und PC_1 (siehe Beweis zu Satz 1).

Satz 3. *Alle Miquelschen Dreiecke zu P sind einander ähnlich.*



Beweis. In der Zeichnung sind die Winkel α_1 und β_2 eingezeichnet. Nach dem Peripheriewinkelsatz in AC_1PB_1 ist $\alpha_1 = \angle PC_1B_1$, nach dem Peripheriewinkelsatz in BA_1PC_1 ist $\beta_2 = \angle A_1C_1P$, somit ist $\angle A_1C_1B_1 = \alpha_1 + \beta_2$. Da α_1 und β_2 nur von der Lage von P abhängen, ist $\angle A_1C_1B_1$ durch die Lage von P eindeutig bestimmt. Das gleiche gilt für die anderen Innenwinkel von $A_1B_1C_1$. Somit haben alle Miquel-Dreiecke die gleichen Winkel und sind daher ähnlich.

Ich möchte hier noch einen zweiten Beweis vorführen, denn dieser Beweis zeigt zwar, daß die Innenwinkel von $A_1B_1C_1$ eindeutig bestimmt sind, aber ich will diese

Innenwinkel noch in Abhängigkeit von „besseren” Winkeln darstellen. Dazu beweise ich folgendes:

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle BPC - \alpha$$

Zuerst zerlege ich $\angle BPC$ in $\angle BPA_1 + \angle A_1PC$. $\angle BPA_1$ entspricht über dem Bogen BA_1 dem Winkel $\angle BC_1A_1$, $\angle A_1PC$ entspricht $\angle A_1B_1C$ über dem Bogen A_1C. Nach dem Außenwinkelsatz im Dreieck A_1AC_1 gilt nun $\angle BC_1A_1 = \angle C_1AA_1 + \angle AA_1C_1$, genauso für das Dreieck AA_1B_1: $\angle A_1B_1C = \angle A_1AB_1 + \angle B_1A_1A$. Setzt man das nun alles zusammen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\angle BPC &= \angle BPA_1 + \angle A_1PC \\
&= \angle BC_1A_1 + \angle A_1B_1C \\
&= \angle C_1AA_1 + \angle AA_1C_1 + \angle A_1AB_1 + \angle B_1A_1A \\
&= \angle C_1AA_1 + \angle A_1AB_1 + \angle AA_1C_1 + \angle B_1A_1A \\
&= \alpha + \angle B_1A_1C_1
\end{aligned}$$

Dies war zu beweisen. Analog zeigt man:

$$\begin{aligned}
\angle C_1B_1A_1 &= \angle CPA - \beta \\
\angle A_1C_1B_1 &= \angle APC - \gamma
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

Wir wollen uns nun dem Miquelschen Fußpunktdreieck zuwenden und seine Seitenlängen berechnen:

Da die Punkte A, B_1, P, C_1 auf einem Kreis liegen und bei B_1 und C_1 rechte Winkel sind, ist AP Durchmesser (Thalessatz). Daher gilt nach Sinussatz im Dreieck AC_1B_1:

$$\begin{aligned}
\frac{B_1C_1}{\sin\alpha} &= AP \\
B_1C_1 &= AP \cdot \sin\alpha
\end{aligned}$$

Es ist außerdem nach Sinussatz: $a/(\sin\alpha) = 2r$, wobei r der Umkreisradius ist. Einsetzen führt auf:

$$B_1C_1 = \frac{AP \cdot a}{2r}$$

Und analog:

$$\begin{aligned}
A_1C_1 &= \frac{BP \cdot b}{2r} \\
A_1B_1 &= \frac{CP \cdot c}{2r}
\end{aligned}$$

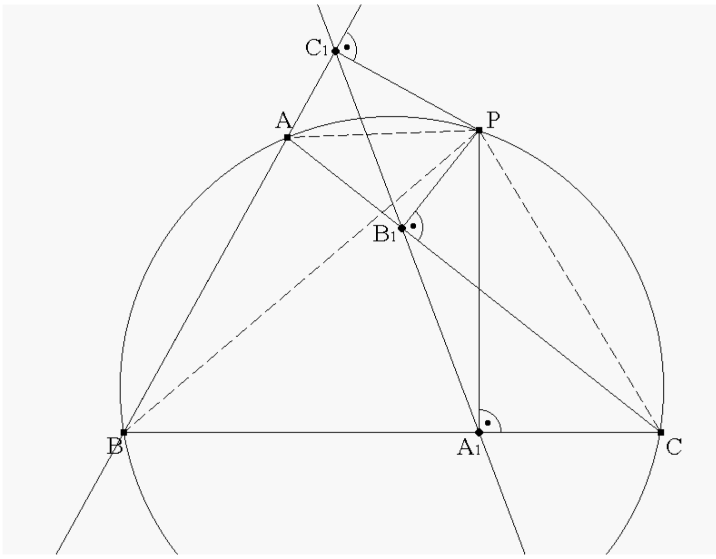
Aufgabe 1. *Verbindet man die Mittelpunkte der drei Miquelschen Kreise, so ist das entsprechende Dreieck $M_1M_2M_3$ dem gegebenen Dreieck ABC ähnlich.*

Tip: Wichtig ist hier Satz 2.

Aufgabe 2. *Sind die Abstände des Miquelschen Punktes P von den Ecken des Dreiecks ABC gleich, so sind alle durch diesen Punkt bestimmten Miquelschen Dreiecke dem gegeben Dreieck ABC ähnlich.*

2 Die Simsonsche Gerade

Satz 4. *Wählt man einen Punkt P auf dem Umkreis und fällt von ihm die Lote auf die Dreieckseiten, so liegen die Lotfußpunkte auf einer Geraden, der* Simsonschen Geraden.



Beweis. Ohne Einschränkung sei P auf dem Bogen zwischen A und C (siehe Zeichnung). Die Lotfußpunkte seien A_1, B_1 und C_1. Wir betrachten P nun als Miquelschen Punkt zu diesen drei Punkten. Für jedes Miquelsches Dreieck gilt die Relation $\angle B_1A_1C_1 = \angle BPC - \alpha$. Nun sind aber $\angle BPC$ und α Peripheriewinkel über BC, ihre Differenz ist also 0. Da ein Innenwinkel von $A_1B_1C_1$ gleich 0° ist, liegen A_1, B_1 und C_1 auf einer Geraden. $\boxed{\text{q.e.d.}}$

Aufgabe 3. *Fällt der Punkt P auf eine Ecke des Dreiecks ABC, so ist die zugehörige Simsonsche Gerade die von der Ecke ausgehende Höhe des Dreiecks.*

Aufgabe 4. *Ist der Punkt P der Endpunkt eines von einer Dreiecksecke gezogenen Durchmessers des Umkreises, so ist die der Ecke gegenüberliegende Seite die zugehörige Simsonsche Gerade.*

Da es sich bei $A_1B_1C_1$ um ein Fußpunktdreieck handelt, gelten die Formeln für die Seitenlängen von Miquelschen Fußpunktdreiecken. Da das Dreieck hier zu einer Geraden wird, ist:

$$\begin{aligned} C_1B_1 + B_1A_1 &= C_1A_1 \\ \frac{AP \cdot a}{2r} + \frac{CP \cdot c}{2r} &= \frac{BP \cdot b}{2r} \\ AP \cdot BC + CP \cdot AB &= BP \cdot AC \end{aligned}$$

Dies ist ein Beweis für den Satz des Ptolemäus:

Satz 5 (Ptolemäus). *In einem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten.*

Beweis. $ABCP$ ist ein allgemeines Sehnenviereck, in dem der Satz hergeleitet wurde. $\boxed{\text{q.e.d.}}$

Liegt P nicht auf dem Umkreis, so ist $\angle BPC$ nicht gleich α, $A_1B_1C_1$ ist also ein „echtes" Dreieck. Es gilt somit die Dreiecksungleichung:

$$AP \cdot BC + CP \cdot AB \quad \geq \quad BP \cdot AC$$

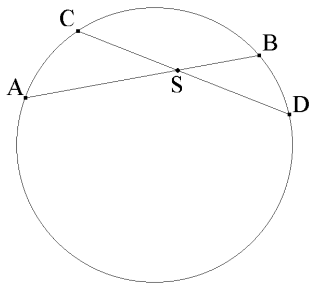
Dies ist die Ptolemäische Ungleichung.

3 Der Flächeninhalt des Miquelschen Fußpunktsdreiecks

Zuerst führe noch einen Satz und eine Definition ein:

Satz 6 (Sehnensatz). *Seien A,B,C und D Punkte auf einem Kreis und S der Schnittpunkt von AC mit BD, dann ist*

$$AS \cdot SB \quad = \quad CS \cdot SD$$

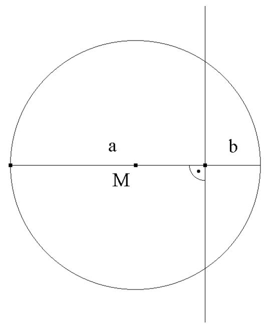


Beweis. Es gilt $\angle ACD = \angle ABD$, da sie Peripheriewinkel über AD sind. Außerdem ist $\angle ASC = \angle BSD$, da sie Scheitelwinkel sind. Damit sind ASC und BSD ähnlich. Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{CS}{BS} &= \frac{AS}{DS} \\ CS \cdot DS &= BS \cdot AS \end{aligned}$$

q.e.d.

Aufgabe 5. *Beweise geometrisch die arithmetisch-geometrische Ungleichung $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$. Bilde dazu über dem Durchmesser $a+b$ einen Kreis und errichte im Teilungspunkt zwischen A und B eine Senkrechte.*



Wenn man also einen Punkt P innerhalb eines Kreises wählt, und eine beliebige Sehne durch ihn zeichnet, so ist das Produkt der Sehnenabschnitte immer gleich.

Insbesondere gilt dies, wenn man durch P einen Durchmesser zeichnet. Ist M der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises, so erhält man:

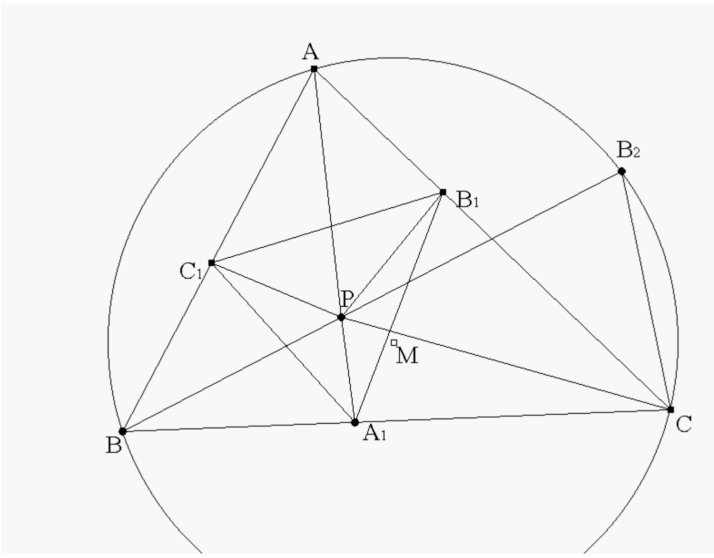
$$(r + MP)(r - MP) = r^2 - MP^2$$

Definition 2. Ist ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r gegeben, so heiße $r^2 - MP^2$ die *Potenz* eines Punktes P.

Es soll nun bewiesen werden, daß der Flächeninhalt des Fußpunktsdreiecks eines Punktes P im Dreieck ABC proportional ist der Potenz des Punktes P im Bezug auf den Umkreis des Dreiecks ABC.

Der Flächeninhalt von ABC sei Δ. Er beträgt (r=Umkreisradius):

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{a \cdot h_a}{2} \\ &= \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} \\ &= \frac{\sin\alpha \cdot 2r \cdot \sin\gamma \cdot 2r \cdot \sin\beta}{2} \\ &= 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\end{aligned}$$



Nach Außenwinkelsatz in PCB_2 gilt:

$$\begin{aligned}\angle BPC &= \angle PB_2C + \angle PCB_2 \\ \angle BPC &= \angle BB_2C + \angle PCB_2 \quad \angle BB_2C = \alpha \text{ nach Peripheriewinkelsatz über } BC \\ \angle BPC &= \alpha + \angle PCB_2\end{aligned}$$

Nach dem Satz über die Ähnlichkeit von Miqueldreiecken gilt:

$$\angle BPC = \angle B_1A_1C_1 + \alpha$$

Aus beidem zusammen folgt:

$$\angle PCB_2 = \angle B_1A_1C_1$$

Dann ist der Inhalt des Fußpunktdreiecks $A_1B_1C_1$:

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin\angle B_1A_1C_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot PC \cdot \sin\gamma \cdot PB \cdot \sin\beta \cdot \sin\angle B_1A_1C_1\end{aligned}$$

Nach Sinussatz in PB_2C gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\angle B_2CP}{\sin\angle BB_2C} &= \frac{PB_2}{PC} \\
\sin\angle B_2CP &= \frac{PB_2}{PC}\sin\alpha
\end{aligned}$$

Setzt man dies in die Gleichung für F ein, ergibt sich:

$$F = \frac{1}{2}\cdot PB\cdot PB_2\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

Nach Sehnensatz ist $PB\cdot PB_2 = r^2 - MP^2$. Damit ergibt sich:

$$F = \frac{1}{2}(r^2 - MP^2)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{r^2 - MP^2}{4r^2}\Delta$$

Aufgabe 6. *Wann ist die Fläche des Fußpunktdreiecks am größten, wann am kleinsten? (ABC fest und P variabel)*